Introduction aux Méthodes de Monte Carlo en Finance

Réduction de variance

ESILV Ingénierie Financière S8

Cours du 24 avril 2012 – Partie 1

Marie Bernhart

Plan de la présentation

- **Méthodes de Monte Carlo en Finance : Rappels**

- **Méthodes de Monte Carlo : Réduction de variance**
  - Variables antithétiques
  - Variables de contrôle
  - Fonction d’importance

Plan de la présentation

- **Méthodes de Monte Carlo en Finance : Rappels**
- **Méthodes de Monte Carlo : Réduction de variance**
  - Variables antithétiques
  - Variables de contrôle
  - Fonction d'importance

Méthodes de Monte Carlo en Finance : Références

- *Méthodes de Monte Carlo en Finance*, Emmanuel Gobet

  Poly. de cours de l'Université Paris 6, Master Probabilité et Applications
- *Méthodes de Monte Carlo en Finance*, Bruno Bouchard

  Poly. de cours de l'Université Paris Dauphine, Master MASEF

Méthodes de Monte Carlo en Finance : Rappels

- Estimation approchée de la **prime d'une option européenne** :

$$P_0 = \mathbb{E}\left[\phi(S_T)\right]$$

- Avec la Loi des Grands Nombres (LGN). Si

$$S_T^1, S_T^2, \ldots, S_T^N \text{ i.i.d.} \sim S_T$$

alors

$$P_0^N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \phi(S_T^n) \longrightarrow_{N\to+\infty} P_0 \text{ p.s.}$$

Méthodes de Monte Carlo en Finance : Rappels

- **Variance empirique** de l'estimateur Monte Carlo :

$$S_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\phi(S_T^n) - P_0^N\right)^2 \longrightarrow_{N\to+\infty} \mathrm{var}\left(\phi(S_T)\right) \ \text{p.s.}$$

- Le Théorème Central Limite (TCL) donne la vitesse de convergence

$$\frac{\sqrt{N}}{S_N}\left(P_0^N - P_0\right) \longrightarrow_{N\to+\infty} \mathcal{N}(0,1) \text{ en loi}$$

- Intervalle de confiance à 95% :

$$\mathbb{P}\left(P_0 \in \mathbf{IC}\right) = 95\% \text{ avec } \mathbf{IC} = \left[P_0^N - 1.96\frac{S_N}{\sqrt{N}}, P_0^N + 1.96\frac{S_N}{\sqrt{N}}\right]$$

Méthodes de Monte Carlo en Finance : Rappels

- Avantages :
  - Il suffit de savoir simuler le sous-jacent.
  - Relativement générique

Vitesse de convergence en $\frac{1}{\sqrt{N}}$

  - Insensible à la dimension
  - Indépendante de la régularité du payoff

- Inconvénients :
  - Grand nombre de simulations nécessaires
  - Temps de calcul

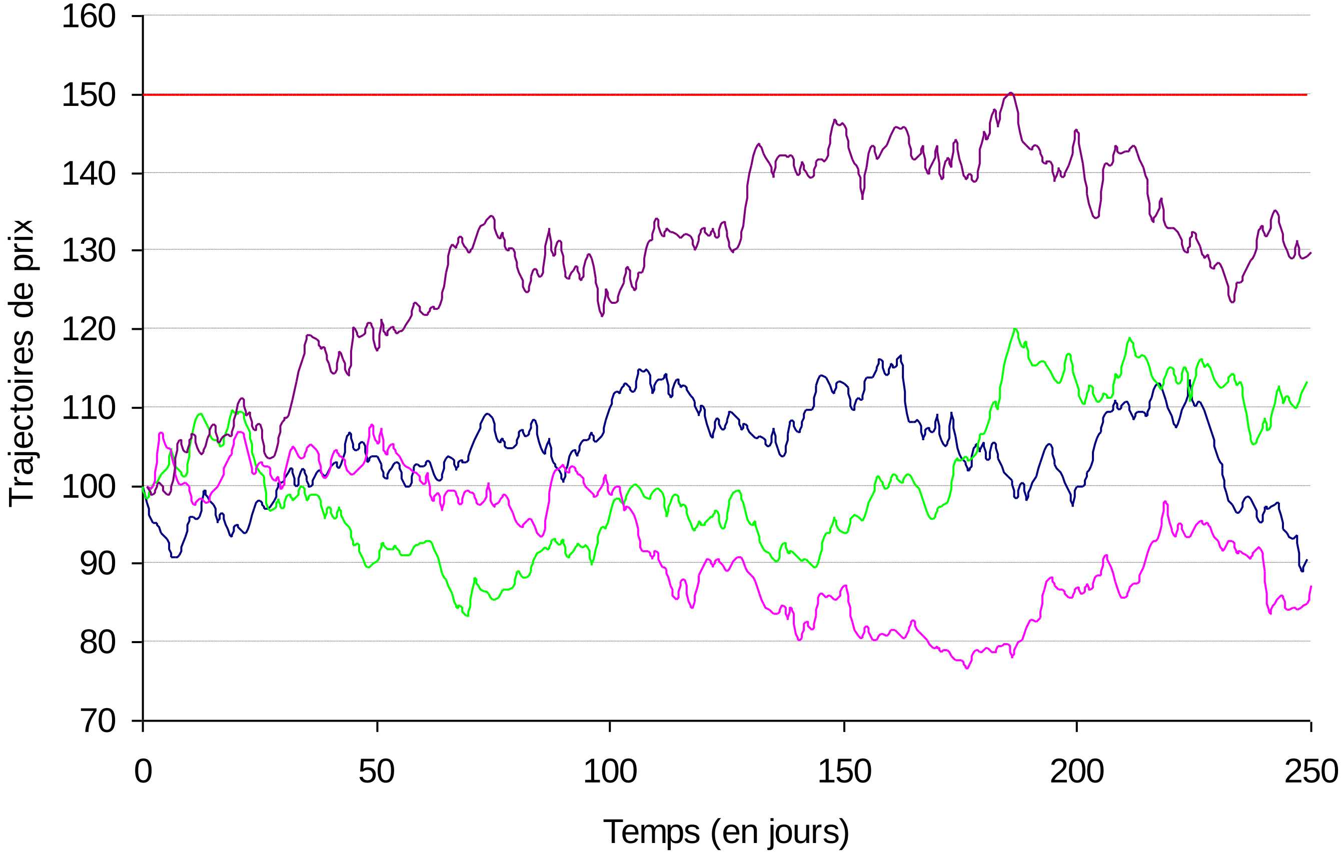
Variance de l'estimateur en $\mathrm{var}\left(\phi(S_T)\right)$

  - **Grande variance** possible

Attention : Pour les options américaines, méthode Monte Carlo pas aussi directe.

Exemple : Estimation du prix d'un Call OTM tel que $S_0 = 100, K = 150$

Paramètres $T = 1 \text{ an}, r = 0, \sigma = 25\%$



Grande variance car peu de trajectoires du prix sont au-dessus du strike en *T*.

Plan de la présentation

- **Méthodes de Monte Carlo en Finance : Rappels**
- **Méthodes de Monte Carlo : Réduction de variance**
  - Variables antithétiques
  - Variables de contrôle
  - Fonction d’importance

Méthodes de Monte Carlo : Réduction de variance

- La variance de l'estimateur Monte Carlo peut être grande :
  - Payoff irrégulier ϕ Exemple : Options digitales ou Corridor
  - Options en hors de la monnaie (OTM)

    La variance de l'estimateur MC d'un Call croit quand $\frac{S_0}{K}$ diminue

    Celle d'un Put croit quand $\frac{S_0}{K}$ augmente

- Principalement, 4 méthodes de réduction de variance :
  1. Variables antithétiques
  2. Variables de contrôle
  3. Fonctions d'importance (importance sampling)
  4. Régularisation du payoff

Réduction de variance : Variables antithétiques

- <u>Idée générale</u> : On utilise le fait que $W = -W \text{ en loi}$

D'où $$P_0 = \mathbb{E}\left[\phi(W_T)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\phi(W_T)+\phi(-W_T)}{2}\right]$$

On va avoir besoin de simuler 2 fois moins de trajectoires MC pour obtenir une même variance car sous des hypothèses appropriées :

$$\mathrm{var}\left(\frac{\phi(W_T)+\phi(-W_T)}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\mathrm{var}\left(\phi(W_T)\right)$$

- Si $\begin{cases} S_T = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t} \\ \bar{S}_T = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t-\sigma W_t} \end{cases}$ alors $S_T = \bar{S}_T \text{ en loi}$

Réduction de variance : Variables antithétiques

- Si le payoff ϕ est monotone, alors

$$\mathrm{var}\left(\frac{\phi(S_T)+\phi(\bar{S}_T)}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\mathrm{var}\left(\phi(S_T)\right)$$

- On simule *N* aléas Browniens $W_T^1, W_T^2, \ldots, W_T^N$ i.i.d. $\sim \sqrt{T}\mathcal{N}(0,1)$

et on pose
$$\begin{cases} S_T^n = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t^n} \\ \bar{S}_T^n = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t-\sigma W_t^n} \end{cases}$$

- On estime le prix par MC avec $P_0^N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{\phi(S_T^n)+\phi(\bar{S}_T^n)}{2}$

Réduction de variance : Variables antithétiques

- Le nouvel estimateur MC $P_0^N = \frac{1}{N/2} \sum_{n=1}^{N/2} \frac{\phi(S_T^n) + \phi(\bar{S}_T^n)}{2}$

a une variance inférieure à celle de $P_0^N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \phi(S_T^n)$

On **divise** donc **le nombre de trajectoires MC par 2**.

- <u>Avantage de la méthode</u> : Simple à mettre en œuvre
- <u>Inconvénient</u> : Réduit peu la variance

Réduction de variance : Variables de contrôle

- <u>Idée générale</u> : On écrit

$$P_0 = \mathbb{E}\left[\phi(S_T)\right] = \mathbb{E}\left[\phi(S_T) - \tilde{\phi}(S_T)\right] + \mathbb{E}\left[\tilde{\phi}(S_T)\right]$$

On suppose que l'on sache calculer de façon explicite $\mathbb{E}\left[\phi(S_T) - \tilde{\phi}(S_T)\right]$
Alors, on gagne en variance dès que

$$\mathrm{var}\left(\tilde{\phi}(S_T)\right) \leq \mathrm{var}\left(\phi(S_T)\right)$$

- Dans le cadre Black-Scholes, pour l'estimation de prix de Call et Put, on peut utiliser la **relation de parité** :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Réduction de variance : Variables de contrôle

- Pour estimer le prix d'un Call OTM (grande variance), on se ramène à estimer le prix d'un Put ITM (faible variance) :

$$\mathbb{E}\left[e^{-rT}\left(S_T - K\right)^+\right] = S_0 - Ke^{-rT} + \mathbb{E}\left[e^{-rT}\left(K - S_T\right)^+\right]$$

Et de façon similaire pour un Put OTM.

- Point de vue plus général : on introduit une variable de contrôle $C(S_T)$ d'espérance nulle et un coefficient β. On écrit :

$$P_0 = \mathbb{E}\left[\phi(S_T)\right] = \mathbb{E}\left[\phi(S_T) - \beta C(S_T)\right]$$

On gagne en variance dès que

$$\mathrm{var}\left(\phi(S_T) - \beta C(S_T)\right) \leq \mathrm{var}\left(\phi(S_T)\right)$$

Réduction de variance : Variables de contrôle

- Si $C(S_T)$ a une matrice de var/covar notée s alors le coefficient qui minimise la variance $\operatorname{var}\left(\phi(S_T) - \beta C(S_T)\right)$ vaut :

$$\beta^* = s^{-1} \operatorname{covar}\left(\phi(S_T), C(S_T)\right)$$

- On pourra calculer ce coefficient optimal β^* numériquement.

- Comme le prix du sous-jacent est martingale sous la probabilité risque neutre, la **variable de contrôle naturelle** sous Black-Scholes est :

$$C(S_T) = e^{-rT} S_T - S_0$$

Réduction de variance : Variables de contrôle

- Alors, on vérifie que :

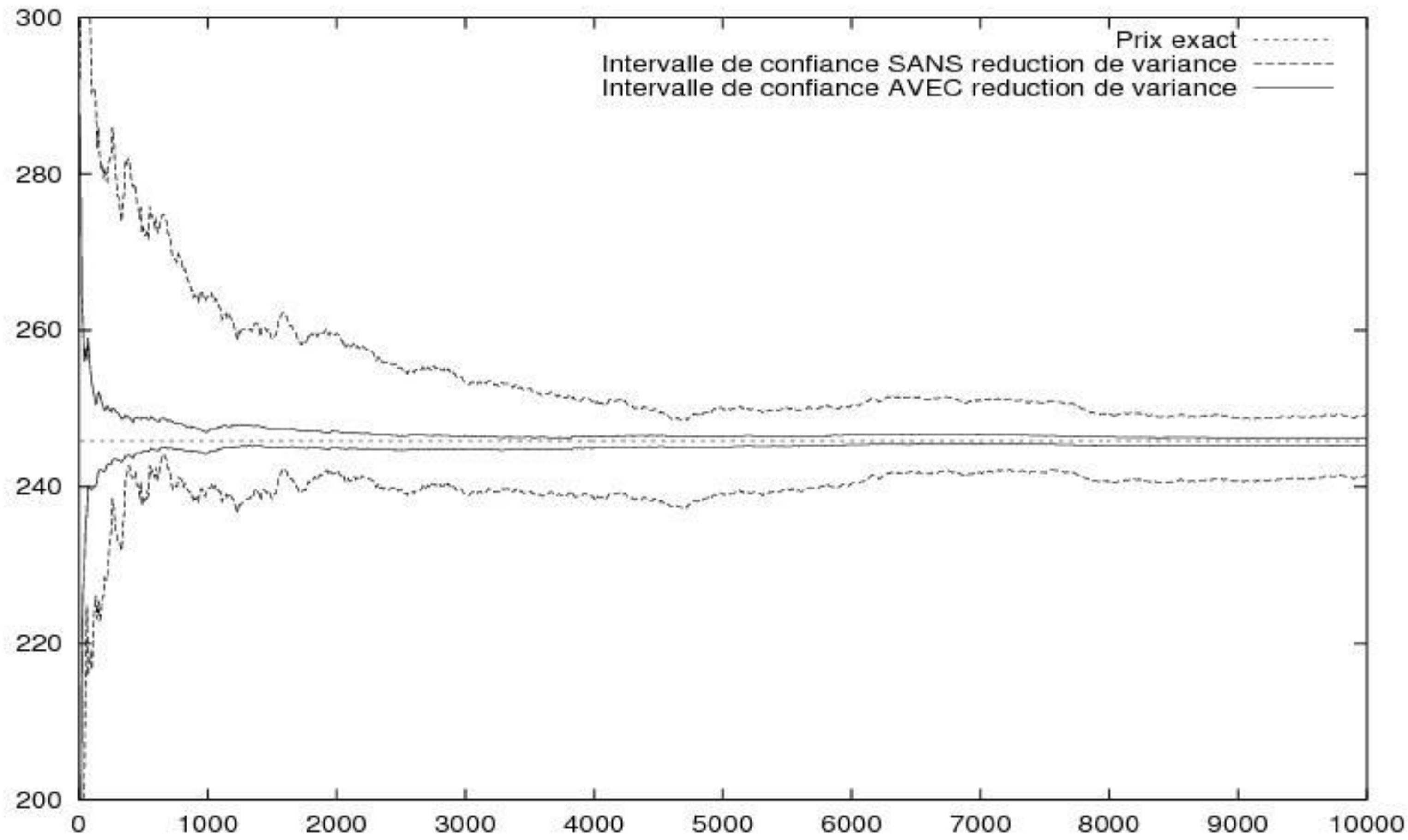
$$\beta^* = \frac{\mathrm{covar}\left(\phi(S_T), S_T\right)}{\mathrm{var}\left(S_T\right)}$$

- Avantage : Peut réduire fortement la variance
- Inconvénient : Il faut intuiter la bonne variable de contrôle
- L'approche générale n'est efficace que si $(\phi(S_T), C(S_T))$

sont fortement corrélés donc peu efficace pour options OTM mais très efficace pour options ITM :

  - Call ITM $S_0 \gg K$ donc grande corrélation et $\beta^* \longrightarrow 1$
  - Call OTM $S_0 \ll K$ donc faible corrélation et $\beta^* \longrightarrow 0^-$

<u>Exemple</u> : Call ITM tel que $S_0 = 1000, K = 800, r = 5\%, \sigma = 20\%, T = 1$
Intervalles de confiance à 95%.
Variance divisée par un facteur 600 : 600 fois moins de traj. MC nécessaires.



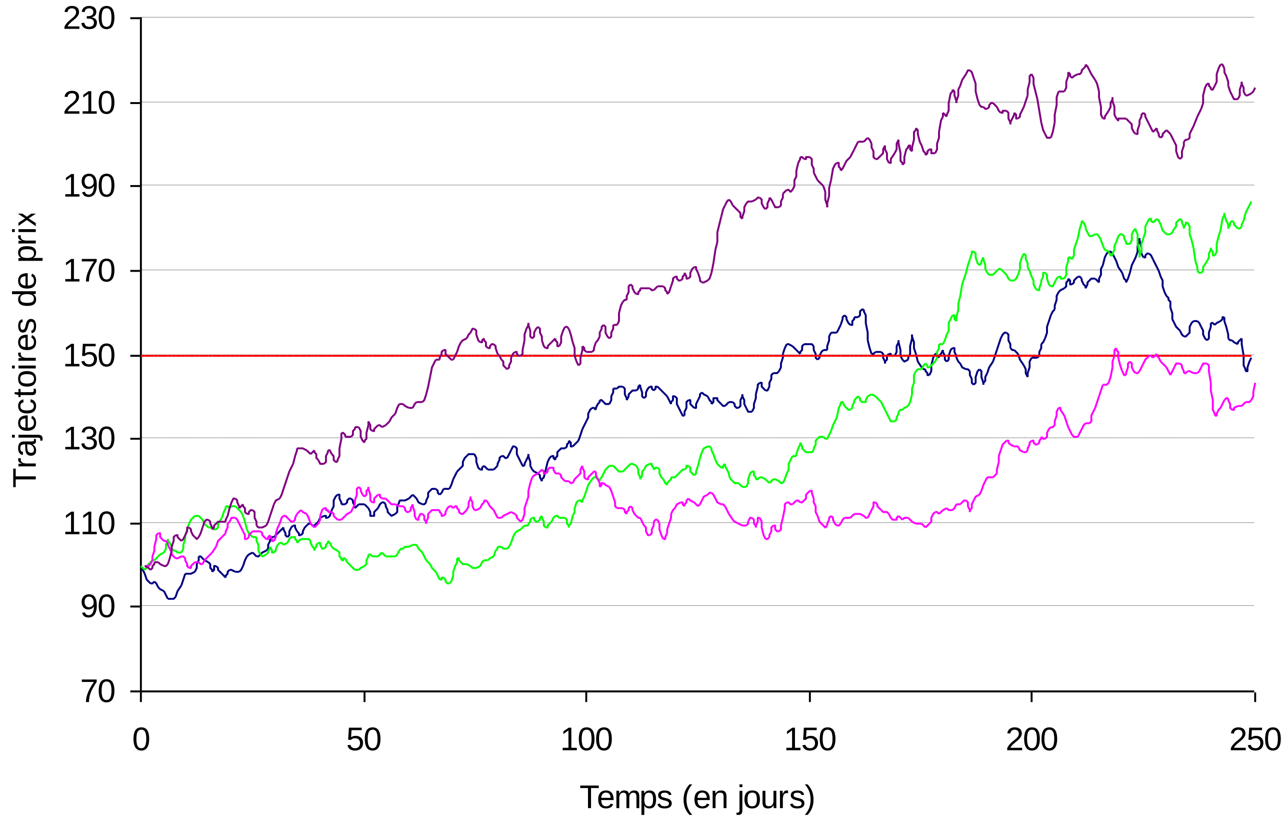
Réduction de variance : Fonction d'importance

- Idée générale : Pour estimer un Call OTM $S_0 \ll K$
on incite le sous-jacent à passer au dessus du strike à maturité en lui **ajoutant un drift** λ pour augmenter $\mathbb{P}\left[S_T \geq K\right]$

- Cela peut être fait grâce au théorème de Girsanov (changement de probabilité) sans changer la valeur de l'espérance qu'on souhaite calculer. Pour un Call :

$$P_0 = \mathbb{E}\left[e^{-rT}\left(S_T - K\right)^+\right]$$

Exemple : Estimation du prix d'un Call OTM tel que $S_0 = 100, K = 150$
Paramètres $T = 1 \text{ an}, r = 0, \sigma = 25\% \text{ et } \lambda = 2$



On réduit la variance en augmentant la probabilité que le sous-jacent soit supérieure au strike à maturité.

Réduction de variance : Fonction d'importance

- *Théorème de Girsanov* : Soit λ un processus adapté tel que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |\lambda_s|^2 ds\right] < \infty$$

On introduit le changement de probabilité par rapport à la probabilité risque neutre :

$$Z_T^\lambda := \left.\frac{d\mathbb{Q}^\lambda}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_T} = e^{-\frac{1}{2}\int_0^T |\lambda_s|^2 ds + \int_0^T \lambda_s dW_s}$$

Alors :

- $\mathbb{E}\left[Z_T^\lambda\right] = 1$ et les probabilités sont équivalentes : $\mathbb{Q}^\lambda \sim \mathbb{Q}$
- $W_t^\lambda = W_t - \lambda t$ est un mouvement Brownien sous $\mathbb{Q}^\lambda$
- On a :

$$P_0 = \mathbb{E}\left[\phi(S_T)\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\lambda}\left[\left(Z_T^\lambda\right)^{-1}\phi(S_T)\right]$$

Réduction de variance : Fonction d'importance

- Application au pricing d'un Call OTM : au lieu d'estimer par MC

$$P_0 = \mathbb{E}\left[e^{-rT}\left(S_T - K\right)^+\right]$$

on utilise l'expression du prix sous la **nouvelle probabilité** :

$$P_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\lambda}\left[\left(Z_T^\lambda\right)^{-1} e^{-rT}\left(S_T - K\right)^+\right]$$

- Pour un $\lambda > 0$ constant, on vérifie simplement que :

$$P_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\lambda}\left[e^{-\frac{\lambda^2}{2}T - \lambda W_T^\lambda} e^{-rT}\left(S_T^\lambda - K\right)^+\right]$$

avec $W_t^\lambda = W_t - \lambda t$ et $S_T^\lambda = S_0 e^{(r+\sigma\lambda-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t^\lambda}$

Réduction de variance : Fonction d'importance

- On peut chercher $\lambda > 0$ numériquement.
- <u>Exemple</u> : pricing d'un Call OTM tel que $S_0 = 100, K = 150$
  avec $T = 1 \text{ an}, \ r = 0, \sigma = 25\% \text{ et } \lambda = 2$
  Prix exact Black-Scholes 0.672
  Ecart-types et IC 95% obtenus par Monte Carlo :

Nb. de traj. MC	Sans importance sampling	Avec importance sampling $\lambda = 2$
10000	0.0484 [0.584, 0.774]	0.0046 [0.668, 0.686]
100000	0.0149 [0.658, 0.716]	0.0015 [0.669, 0.675]

La variance est divisée par 110 (10000 traj.) et par 98 (100000 traj.)

<u>Exemple</u> : Call OTM tel que $S_0 = 1000, K = 1500, r = 5\%, \sigma = 20\%, T = 1$
Intervalles de confiance à 95%.
Variance divisée par un facteur 75 : 75 fois moins de traj. MC nécessaires.