Delta couverture de produits dérivés en Finance

ESILV Ingénierie Financière S8

Cours du 24 avril 2012 – Partie 2

Marie Bernhart

Plan de la présentation

- **Couverture de produits dérivés en Finance**
  - Principe de couverture : Duplication de produits dérivés
  - Delta hedging à temps discret dans le modèle de Black-Scholes

- **Calcul de Delta par méthodes de Monte Carlo**
  - Méthode des différences finies
  - Méthode du processus tangent
  - Méthode basée sur le calcul de Malliavin

Plan de la présentation

- **Couverture de produits dérivés en Finance**
  - Principe de couverture : Duplication de produits dérivés
  - Delta hedging à temps discret dans le modèle de Black-Scholes
- **Calcul de Delta par méthodes de Monte Carlo**
  - Méthode des différences finies
  - Méthode du processus tangent
  - Méthode basée sur le calcul de Malliavin

Couverture de produits dérivés en Finance

Principe de couverture : Duplication de produits dérivés

- **Couvrir un produit financier/un portefeuille** = Se prémunir contre les risques liés à l'évolution du marché encourus lorsqu'on détient ce produit/ce portefeuille
  - Variation à la hausse/baisse du sous-jacent : couverture en Delta
  - Variation du Delta : couverture en Gamma
  - Variation de la volatilité : couverture en Vega
  - etc.

- **Duplication** d'un produit dérivé = Construction d'un portefeuille de couverture à partir d'actifs que l'on peut trouver sur le marché.

Couverture de produits dérivés en Finance

Principe de couverture : Duplication de produits dérivés

- Si V est le prix de mon produit financier/portefeuille à la date t ,

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial V}{\partial \Delta}, \quad \mathcal{V} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \quad \Theta = \frac{\partial V}{\partial (T-t)} = -\frac{\partial V}{\partial t}$$

- L'EDP de Black-Scholes donne la relation entre les **Grecques** du modèle de Black-Scholes :

$$-\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma + rS\Delta = rV$$

Couverture de produits dérivés en Finance

Principe de couverture : Duplication de produits dérivés

- La **couverture en Delta** consiste à acheter ou vendre une quantité Delta du sous-jacent pour compenser l'évolution de mon produit relative à la variation du sous-jacent.

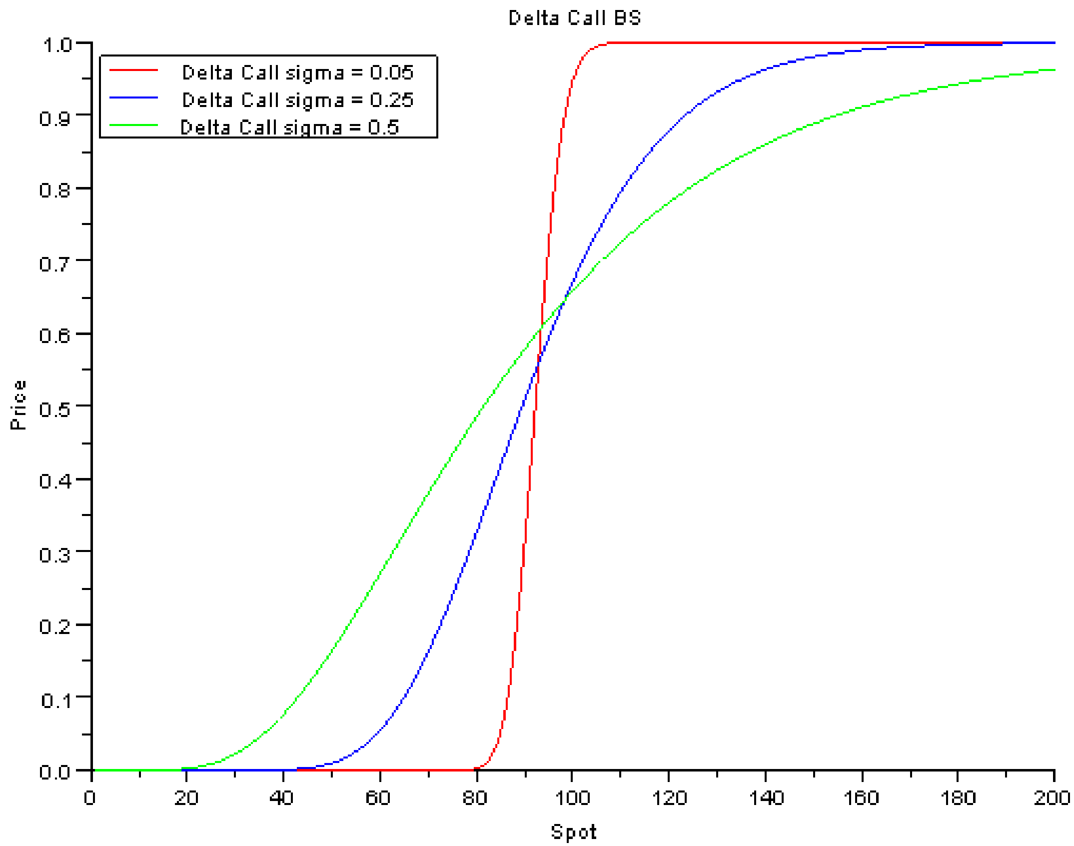
- On note P la valeur du portefeuille de couverture :

$$\begin{cases} dV & = \frac{\partial V}{\partial S} dS = \Delta dS \\ P & = -\Delta S \end{cases} \Rightarrow dV + dP = 0$$

- Couverture du 1er ordre : **Delta hedging**
- Couverture du 2nd ordre : **Delta-Gamma hedging**

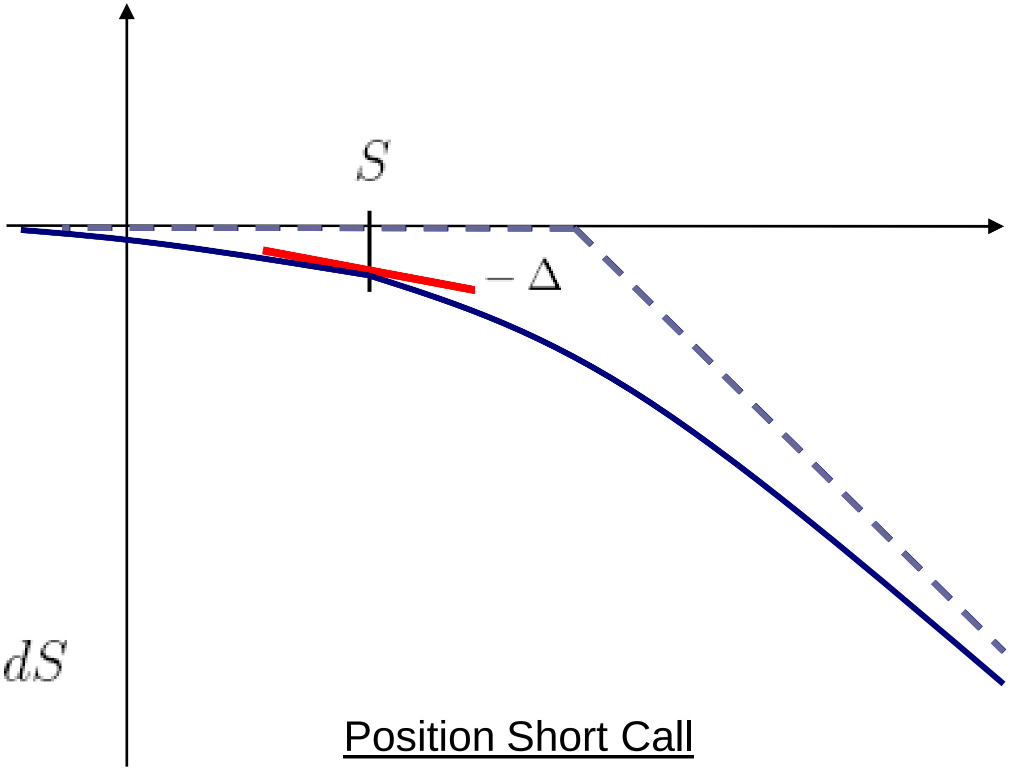
$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \Delta dS + \frac{1}{2} \Gamma dS^2$$

Delta : Très sensible pour options ATM
Moins sensible pour options ITM et OTM
Pour un Call : proche de 1 (ITM) et proche de 0 (OTM)



Exemple : Couverture d'un Call

On se place dans la situation on est vendeur d'un Call.



- Mon portefeuille :
  - Short Call
  - Valeur : $-C$
- Stratégie de couverture :
  - Achat de Δ sous-jacent S
  - Valeur : $P = \Delta S$
- Quand le sous-jacent varie de dS

$$dP - dC = 0$$

La possession de Δ unités de sous-jacent permet de **contrer les variations de valeur du call** (à la hausse comme à la baisse).

A l'inverse, si position Long Call : vente de Δ unités de sous-jacent.

Couverture de produits dérivés en Finance
Delta hedging à temps discret

- On se place dans le cadre du modèle de Black-Scholes avec :

$$\begin{cases} R_t = e^{rt} \\ S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\} \end{cases}$$

- Si la quantité Δ est mise à jour à chaque instant (à temps continu), alors **duplication parfaite** : sur toute la durée de vie du produit dérivé,

$$P_t = V_t, \forall t \leq T$$

- La couverture à temps discret introduit une **erreur de couverture** :

$$\mathrm{Err}_T = P_T - V_T$$

- Meilleure couverture quand grande fréquence de rebalancement

Couverture de produits dérivés en Finance
Delta hedging à temps discret

Méthode de couverture sur grille discrète temporelle :

$$\left\{t_0 = 0, t_1 = \frac{T}{n}, \ldots, t_i = i\frac{T}{n}, \ldots, t_n = T\right\}$$

- **Portefeuille de couverture** dans le modèle de Black-Scholes :

$$P_t = \varphi_t^0 R_t + \varphi_t S_t$$

  - Quantité de ssj. risqué à acheter : $\varphi_t = \Delta_t = \mathrm{Delta}(t, S_t)$
  - Emprunt au taux sans risque (financement) : $\varphi_t^0 = e^{-rt}\left(P_t - \Delta_t S_t\right)$

- *Condition d'autofinancement* :

$$dP_t = \varphi_t^0 dR_t + \varphi_t dS_t$$

Couverture de produits dérivés en Finance

Delta hedging à temps discret

- **Dynamique discrète du portefeuille de couverture** :

$$P_{t_i} = e^{r(t_i - t_{i-1})} P_{t_{i-1}} + \Delta_{t_{i-1}} \left(S_{t_i} - S_{t_{i-1}} e^{r(t_i - t_{i-1})} \right)$$

- A la date 0

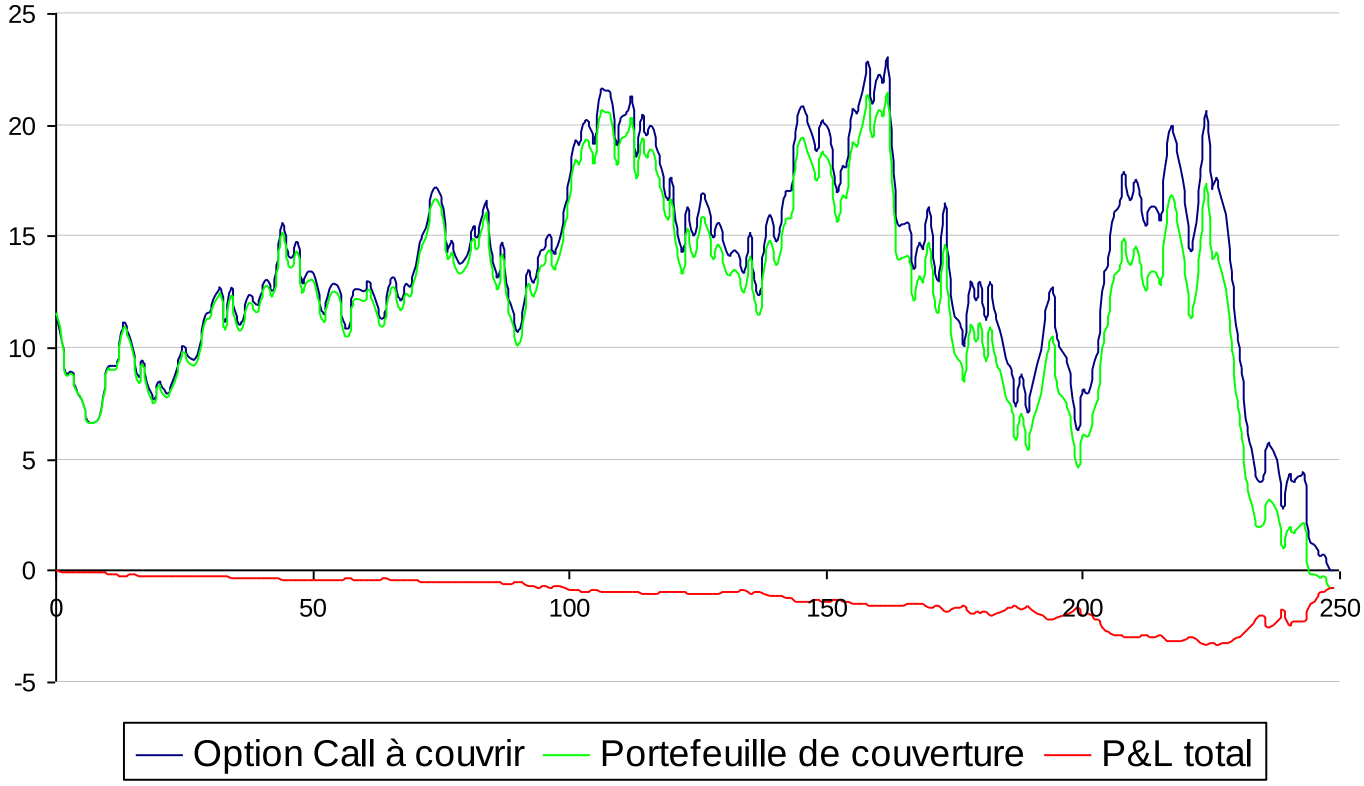
$$P_0 = V(0, S_0), \quad \Delta_0 = \mathrm{Delta}(0, S_0), \quad \varphi_0^0 = P_0 - \Delta_0 S_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_0 & = \varphi_0^0 + \Delta_0 S_0 \\ dP_0 & = \Delta_0 dS_0 \end{cases}$$

- A la date t_1

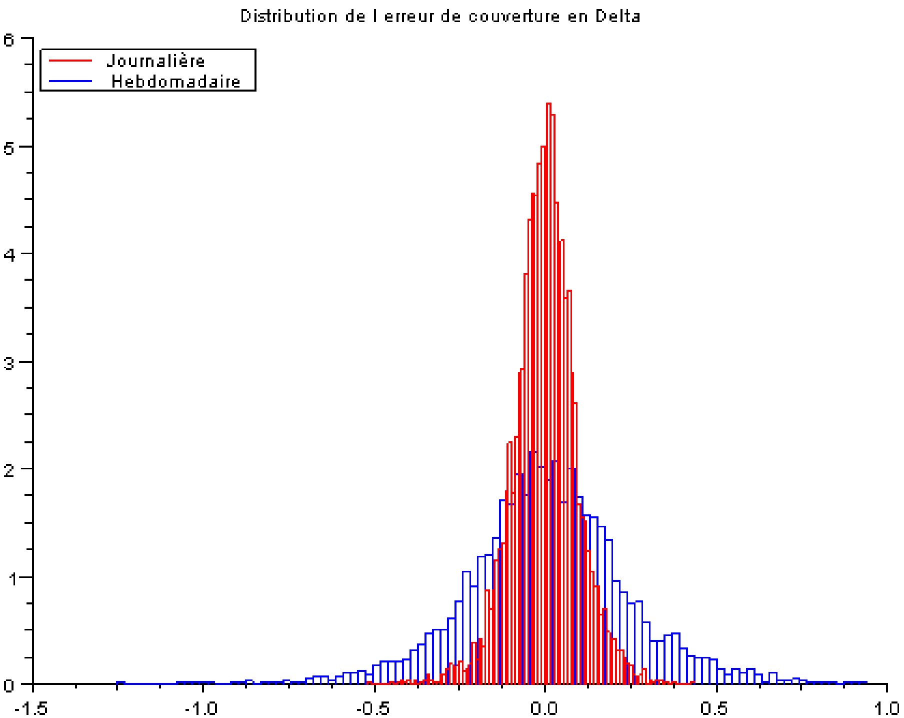
$$P_{t_1} = \varphi_0^0 e^{r(t_1 - t_0)} + \Delta_0 S_{t_1}, \quad \Delta_{t_1} = \mathrm{Delta}(t_1, S_{t_1}), \quad \varphi_{t_1}^0 = P_{t_1} - \Delta_{t_1} S_{t_1}$$

Exemple : Delta hedging d’un Call dans le modèle de Black-Scholes
Couverture dynamique tous les jours entre *0* et *T = 1* an : *n = 250*.



Pour une trajectoire du ssj., simulation du Call Black-Scholes et du portefeuille de couverture. Erreur de couverture = P&L total en *T*. Ici : $\mathrm{Err}_T = -0.788$

Exemple : Delta hedging d'un Call dans le modèle de Black-Scholes
Distribution de l'erreur de couverture pour différentes fréquences de rebalancement



- L'erreur de couverture est **proportionnelle au Gamma** et diminue quand le nombre de rebalancement augmente, comportement en $1/\sqrt{n}$
- Si Delta varie beaucoup, Delta-Gamma couverture nécessaire

Plan de la présentation

- **Couverture de produits dérivés en Finance**
  - Principe de couverture : Duplication de produits dérivés
  - Delta hedging à temps discret dans le modèle de Black-Scholes

- **Calcul de Delta par méthodes de Monte Carlo**
  - Méthode des différences finies
  - Méthode du processus tangent
  - Méthode basée sur le calcul de Malliavin

Calcul de Delta par méthodes de Monte Carlo

- On souhaite estimer le Delta d'options de type européen :

$$\Delta(0,x) = \frac{\partial}{\partial x} V(0,x) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E}\left[\phi(S_T^x)\right]$$

dans un cadre Black-Scholes où

$$S_T^x = x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T}$$

- Il existe trois principales méthodes numériques de calcul de Delta :
  1. Méthode des différences finies
  2. Méthode du processus tangent
  3. Méthode basée sur le calcul de Malliavin

Calcul de Delta par méthodes de Monte Carlo
Méthode des différences finies

- Idée : approcher la dérivée par une dérivée discrète, i.e. perturber la valeur initiale du sous-jacent x
- On introduit un **paramètre de différences finies** noté ϵ
- Par schéma centré : $\Delta(0,x) \sim_{\epsilon \to 0} \dfrac{V(0,x+\epsilon) - V(0,x-\epsilon)}{2\epsilon}$
- Par schéma non centré à droite :

$$\Delta(0,x) \sim_{\epsilon \to 0} \frac{V(0,x+\epsilon) - V(0,x)}{\epsilon}$$

- On peut donc estimer (par Monte Carlo par exemple) :

$$\Delta(0,x)(\epsilon) = \frac{1}{2\epsilon}\left(\mathbb{E}\left[\phi(S_T^{x+\epsilon})\right] + \mathbb{E}\left[\phi(S_T^{x-\epsilon})\right]\right)$$

Calcul de Delta par méthodes de Monte Carlo
Méthode des différences finies

- Méthode la plus utilisée en pratique

- Avantages :
  - Facile à mettre en œuvre dès qu'on dispose d'une procédure de pricing
  - Applicable tout le temps (quelque soit le payoff ou la distribution du prix)
- Inconvénients :
  - Le choix du paramètre supplémentaire ϵ est difficile.
  - Méthode instable pour des payoff irréguliers. Ex. : Digitale ou Corridor

- **Choix critique** du paramètre de DF ϵ
  - ϵ doit être suffisamment petit pour que l'approximation de la dérivée discrète soit bonne
  - Si ϵ petit, la variance de l'estimateur Monte Carlo peut devenir grande.

Calcul de Delta par méthodes de Monte Carlo
Méthode du processus tangent

- Idée : passer la dérivée sous l'espérance, cf. *théorème de dérivation sous le signe intégral*

- Si le payoff ϕ est une fonction $\mathcal{C}_b^1$, alors :

$$\Delta(0,x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbb{E}\left[\phi(S_T^x)\right] = \mathbb{E}\left[\phi'(S_T^x)\nabla_x S_T^x\right]$$

- $\nabla_x S^x = \frac{\partial}{\partial x} S^x$ appelé **processus tangent** ou de dérivée première

- Dans le cadre Black-Scholes :

$$\nabla_x S_t^x = \frac{\partial}{\partial x}\left(x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}\right) = \frac{S_t^x}{x}$$

Calcul de Delta par méthodes de Monte Carlo

Méthode du processus tangent

- Ce résultat est généralisable aux payoff ϕ de $\mathcal{C}_p^1$ dépendant de la trajectoire du sous-jacent. Ex. : Option asiatique.

- On peut alors estimer cette nouvelle expression probabiliste par méthode Monte Carlo.

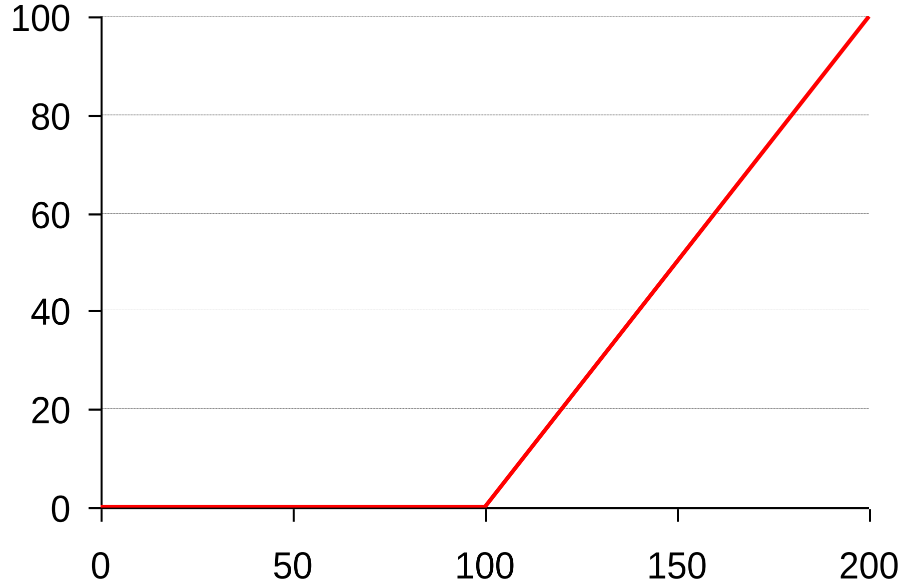
$$\Delta(0,x) = \mathbb{E}\left[\phi'(S_T^x)\frac{S_T^x}{x}\right]$$

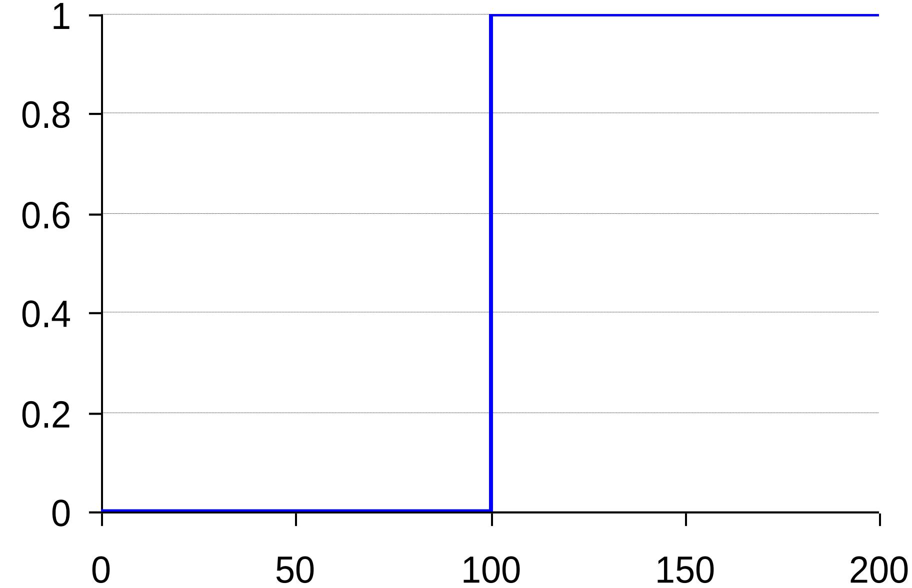
- Avantage : Pour des payoff suffisamment réguliers, méthode plus précise que DF
- Inconvénient : Trop restrictive et mise en œuvre au cas par cas

Exemple : Delta d'un Call par processus tangent dans Black-Scholes

$$V(0,x) = \mathbb{E}\left[e^{-rT}(S_T^x - K)^+\right] \quad \Delta(0,x) = \mathbb{E}\left[e^{-rT}\mathbb{1}_{\{S_T^x \geq K\}}\frac{S_T^x}{x}\right]$$

$$\phi(S) = (S-K)^+ \quad \Longrightarrow \quad \phi'(S) = \mathbb{1}_{\{S \geq K\}}$$





Calcul de Delta par méthodes de Monte Carlo
Méthode basée sur le calcul de Malliavin

- <u>Idée</u> : à partir de la représentation probabiliste précédente où ϕ' est sous l'espérance, utiliser une IPP pour se ramener à une expression avec ϕ sous l'espérance.
- Cette approche restera efficace même pour des **payoff irréguliers**.

- Si le payoff ϕ est une fonction $\mathcal{C}_p^1$, alors :

$$\begin{aligned}\Delta(0,x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbb{E}\left[\phi(S_T^x)\right] &= \mathbb{E}\left[\phi'(S_T^x)\nabla_x S_T^x\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\phi(S_T^x)\frac{W_T}{x\sigma T}\right]\end{aligned}$$

Poids de Malliavin

Calcul de Delta par méthodes de Monte Carlo

Méthode basée sur le calcul de Malliavin

- On peut utiliser cette dernière expression pour procéder à une estimation Monte Carlo.

- Avantage :
  - Méthode efficace pour des payoff ϕ irréguliers
  - Technique qui ne dépend pas du payoff :

    Les poids de Malliavin sont indépendants du payoff.
- Inconvénients :
  - Le calcul des poids de Malliavin peut devenir difficile.
  - Nécessité de connaître la loi du ssj.

Calcul de Gamma par méthodes de Monte Carlo

- Peut-on décliner les 3 méthodes présentées pour calculer numériquement de Gamma d'un produit dérivé ?

$$\Gamma(0,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbb{E}\left[\phi(S_T^x)\right]$$

- Par différences finies :
  - Approximation discrète de la dérivée d'ordre 2
- Par processus tangent :
  - Le payoff ϕ doit être $\mathcal{C}_p^2$
- Avec approche Malliavin :
  - Utiliser 2 IPP successives pour se ramener à ϕ sous l'espérance

Conclusion

- Le **calcul des Grecques** est crucial en finance pour couvrir son portefeuille face au risque d’évolution des paramètres de marché.

- Dans le cadre Black-Scholes, pour des options vanilles, on dispose de formules fermées pour toutes les grecques.
- Pour des ssj. plus complexes et des options exotiques, on peut utiliser principalement **3 méthodes Monte Carlo de calcul de Delta et Gamma**. On choisit la plus appropriée relativement à :
  - La régularité du payoff
  - Si l’on connait ou non la loi des prix ssj.
- Ces méthodes sont en général couplées avec des techniques de **réduction de variance**.